I appello 13/6/18 — Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Elettronica e di Internet
Prof. F. Bracci — A.A. 2017-18

Nome e Cognome (in stampatello e leggibile): ____________________

PARTE I: Rispondere alle seguenti domande barrando con una crocetta tutte e sole le risposte ritenute corrette. *Non sono ammesse cancellature.* Ogni domanda contiene **almeno una (talvolta anche più di una!)** risposta corretta su 4 possibili scelte. Ogni quiz è considerato corretto se sono state indicate tutte e sole le risposte corrette.

Q1) Siano $v_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 99 \\ 999 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} \log 16 + \sqrt{17}\pi \\ 10^{10000} \\ \frac{\sqrt{10007}}{\pi^{17}} \end{pmatrix}$.

(a) $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
(b) $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$.
(c) v_4 è ortogonale a $\operatorname{span}\{v_2, v_3\}$.
(d) $\dim(\operatorname{span}\{v_1, v_2\} \cap \operatorname{span}\{v_3, v_4\}) = 1$.

Q2) Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Siano

$$A_{\alpha,\beta} := \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 145 & 0 \\ 34\pi & \frac{112}{\sqrt{4509}} & 9999 \end{pmatrix}.$$

(a) La matrice $CA_{\alpha,\beta}C^{-1}$ è invertibile per ogni valore di α, β.
(b) Il rango di $CA_{\alpha,\beta}C^{-1}$ è 2 per $\alpha = \beta = 0$.
(c) Per $\alpha = \beta = 0$ la matrice $CA_{\alpha,\beta}C^{-1}$ è diagonalizzabile.
(d) Gli autovalori di $CA_{\alpha,\beta}C^{-1}$ dipendono da α, β.

Q3) Sia $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio vettoriale di dimensione $n \geq 2$ dotato di un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Sia $T: V \to V$ un operatore lineare.

(a) Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V. Se $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ sono linearmente dipendenti allora 0 è autovalore di T.
(b) Se $\dim \ker T \geq 1$ allora T non è auto-aggiunto.
(c) Se T è un isomorfismo allora T è auto-aggiunto.
(d) Se T è auto-aggiunto, e T non è l'identità allora 1 non può essere autovalore di T.

Q4) Sia A una matrice 3×3 con entrate reali.
(a) Se A è invertibile, ogni minore 2×2 di A ha determinante non nullo.
(b) Se la traccia di A è < 0 allora $\det A < 0$.
(c) Se il polinomio caratteristico di A è $p(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda$ allora A non è simmetrica.
(d) Se $\det A = 0$ e la traccia di A è nulla allora A è la matrice nulla.

Q5) Siano $1 \leq m < n$. Sia A una matrice $m \times n$ e sia $b \in \mathbb{R}^m$. Sia A' la matrice $m \times (n+1)$ ottenuta aggiungendo la colonna b alla matrice A.
(a) Se esistono soluzioni al sistema $Ax = b$, per $x \in \mathbb{R}^n$ allora il rango di A è m.
(b) Se il rango della matrice A' è m, allora il sistema $Ax = b$, per $x \in \mathbb{R}^n$, ammette esattamente una soluzione.
(c) Il sistema $Ax = b$, per $x \in \mathbb{R}^n$, non ammette mai una unica soluzione.
(d) Se il sistema sistema $Ax = 0$, per $x \in \mathbb{R}^n$, ammette soluzione, allora il sistema $Ax = b$ ammette soluzione.

Q6) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y, z). Sia S l'insieme definito da $x = 1, y = \lambda + \mu, z = \lambda + \mu$ al variare di $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$.
(a) S è un piano affine di equazione $x = 1$.
(b) lo spazio tangente TS è generato dal vettore $(0, 1, 1)$.
(c) Il punto $(0, 0, 0)$ appartiene ad S.
(d) S è contenuto nel piano $(x - 1) + (y - z) = 0$.

Q7) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortogonale con coordinate affini (x, y). Sia r la retta parallela alla retta $x = 1$ e passante per $(0, -1)$.
(a) La distanza di r da $(0, 0)$ è 1.
(b) l'equazione parametrica di r è $x = \lambda, y = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
(c) Siano A, B due punti distinti di r e sia $P_\mu = (1, \mu)$ al variare di $\mu \in \mathbb{R}$. L'area del triangolo di vertici A, B, P_μ non dipende da μ.
(d) Se $\mathcal{R} := \{O; v_1, v_2\}$ è un sistema di riferimento affine ortogonale con coordinate (x', y') per cui lo spazio tangente Tr è generato da v_2, allora r ha equazione cartesiana $x' = a$ per qualche $a \in \mathbb{R}$.

Q8) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y). Sia $\mathcal{C}_\alpha : x^2 + \alpha^2 y^2 - 2\alpha x - 1 = 0$ una famiglia di insiemi al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
(a) Per ogni valore di $\alpha \neq 0$, C_α è una ellisse.
(b) Per $\alpha = 0$, $\mathcal{C}_\alpha$ è una parabola.
(c) Non esistono valori di α per cui $\mathcal{C}_\alpha$ è metricamente equivalente ad una circonferenza.
(d) Per $\alpha < 0$, C_α è una iperbole.

PARTE II: Risolvere il seguente problema, scrivendo le soluzioni, ben motivate, sui fogli bianchi spillati alla fine del compito.

Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortogonale $\mathcal{R}$ con coordinate (x, y, z).

(1) Determinare l'equazione parametrica e l'equazione cartesiana della retta r passante per i punti $(1, 0, -1)$ e $(-1, 0, 1)$.
(2) Determinare l'equazione parametrica e cartesiana del piano π ortogonale a r e contenente l'origine.
(3) Dire, motivando la risposta, se esiste un sistema di riferimento affine ortogonale con coordinate (x', y', z') in cui π è dato da $x' = 0$ e r concide con l'asse delle x'. Se tale sistema di riferimento esiste, trovarlo esplicitamente.
(4) Sia $Q = \pi \cap r$. Determinare le equazioni cartesiane di tutte le coppie di rette che sono ortogonali tra loro, ortogonali a r e passanti per Q. Da quanti parametri reali dipendono tali rette?

Soluzioni:
Q1) b, d
Q2) a, c
Q3) a
Q4) c
Q5) c
Q6) b, d
Q7) c, d
Q8) a

Parte II

(1) Si vede immediatamente che i due punti soddisfano le equazioni $x + z = 0, y = 0$, che sono pertanto le equazioni cartesiane della retta r. Da qui risulta che le equazioni parametriche di r sono $x = \lambda, y = 0, z = -\lambda$, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

(2) Il piano π ha la proprietà che l'ortogonale al suo spazio tangente, $(T\pi)^\perp$ coincide con lo spazio tangente Tr. Pertanto, poiché dalle equazioni parametriche di r risulta che $(1, 0, -1)$ genera Tr, si ha che l'equazione cartesiana di π è $x - z = a$, $a \in \mathbb{R}$. Imponendo la condizione che $(0, 0, 0) \in \pi$, si ha $\pi : x - z = 0$. Da qui si ottiene anche l'equazione parametrica di π, che è data da $x = \lambda, y = \mu, z = \lambda$, al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(3) Poiché π e r sono ortogonali tra loro, e il piano $x' = 0$ e la retta x' sono ortogonali tra loro, esiste un sistema di riferimento affine ortogonale in cui π abbia equazione $x' = 0$ e r sia la retta $y' = z' = 0$. Per trovare un tale sistema di riferimento, scegliamo come origine degli assi $Q = \pi \cap r = (0, 0, 0)$. La base $\{v_1, v_2, v_3\}$ ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che scegliamo dovrà avere la proprietà che $Tr = \text{span}\{v_1\}$— automaticamente, $T\pi$ sarà generato da v_2, v_3. Pertanto, possiamo scegliere $v_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}})$. I vettori v_2, v_3 devono essere di norma 1 e ortogonali tra loro e con v_1. Possiamo allora scegliere $v_2 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

(4) Abbiamo già visto che $Q = (0, 0, 0)$ e che $Tr = \text{span}(1, 0, -1)$. Pertanto, se s_1, s_2 sono due rette ortogonali tra loro e ortogonali a r, passanti per l'origine, e $Ts_1 = \text{span}\{(a_1, b_1, c_1)\}$ e $Ts_2 = \text{span}\{(a_2, b_2, c_2)\}$, risulta $a_1 - c_1 = 0, a_2 - c_2 = 0, a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$ e $(Ts_1)^\perp = \text{span}\{(1, 0, -1), (a_2, b_2, c_2)\}$ e $(Ts_2)^\perp = \text{span}\{(1, 0, -1), (a_1, b_1, c_1)\}$. In altri termini, s_1 è data da $x - z = 0, a_2(x + z) + b_2y = 0$ e s_2 è data da $x - z = 0, a_1(x + z) + b_1y = 0$ con $2a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ e $(a_1, b_1) \neq (0, 0) \neq (a_2, b_2)$.

In particolare, se $b_2 \neq 0$, risulta $b_1 = -2a_1a_2/b_2$ (da cui $a_1 = 0$ implica $b_1 = 0$, pertanto $a_1 \neq 0$) e, ponendo $\alpha := a_2/b_2$, si ottiene $s_1 : x - z = 0, \alpha(x + z) + y = 0$ e $s_2 : x - z = 0, x + z - 2\alpha y = 0$.

D'altra parte se $b_2 = 0$, da cui $a_2 \neq 0$ e $a_1 = 0, b_1 \neq 0$, si ha $s_1 : x-z = 0, x+z = 0$ e $s_2 : x-z = 0, y = 0$.

Pertanto si può dire che le coppie di tali rette sono date da $s_1 : x - z = 0, \alpha(x + z) + y = 0$ e $s_2 : x - z = 0, x + z - 2\alpha y = 0$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.